

# 함수적 회귀 모형을 이용한 한국과 미국 주식시장의 횡단면 분포 간의 관계 분석\*

김 경 모\*\* · 한 희 준\*\*\*

## 논문 초록

본 논문은 한국의 KOSPI 지수와 미국의 S&P500 지수를 구성하는 전체 개별 주가 수익률들의 횡단면 분포를 분석의 대상으로 삼고, 함수적 회귀(functional regression)모형을 이용하여 두 주식시장 간의 관계를 분석한다. 일별(daily) 자료를 다루며 전체 2005년 1월부터 2013년 12월까지의 기간을 글로벌 금융위기 기간과 금융위기 전후의 기간들로 나누어 살펴보고 있다. 한국 주식시장 횡단면 분포의 평균, 분산 및 양쪽 꼬리확률들이 미국 주식시장 횡단면 분포의 변화에 어떻게 영향을 받는지를 반응함수(response function)를 통해 살펴보고, 각 평균, 분산 및 양쪽 꼬리확률들의 변동이 미국 주식시장 횡단면 분포의 적률(moment)들의 분산에 의해 얼마나 설명되는지를 분산분해(variance decomposition)를 통해 분석한다. 미국 주식시장 횡단면 분포로부터 한국 주식시장 횡단면 분포의 평균, 분산 및 왼쪽 꼬리확률로의 전이효과는 금융위기 기간에 가장 높아지고 이후 줄어들었으나 금융위기 이전보다는 훨씬 높은 것으로 나타났다. 반면 한국 주식시장 분포의 오른쪽 꼬리확률로의 전이효과는 금융위기 이후의 기간에 더 높아진 것으로 나타났다.

핵심 주제어: 함수적 회귀분석, 횡단면 분포, 주식시장 간 연계성, 전이효과

경제학문헌목록 주제분류: C14, C22, G15

투고 일자: 2018. 8. 14. 심사 및 수정 일자: 2019. 3. 12. 게재 확정 일자: 2019. 5. 3.

\* 본 논문에 대해 유익한 논평과 조언을 해주신 김창식 교수님(성균관대학교), 박준용 교수님(성균관대학교 및 Indiana University) 그리고 조두연 교수님(성균관대학교)께 감사드립니다.

\*\* 제1저자, 성균관대학교 경제학과 석사과정, e-mail: eco.gyungmo@gmail.com

\*\*\* 교신저자, 성균관대학교 경제학과 부교수, e-mail: heejoonhan@skku.edu

## I. 서론

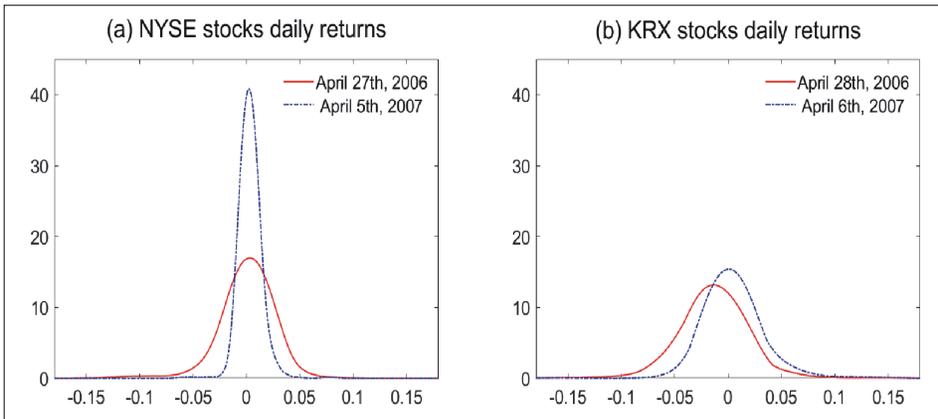
금융시장 간의 관계를 체계적으로 분석하고 이해하는 것은 금융시장의 투자자와 경제 정책/감독 당국이 각자의 역할을 효과적으로 수행하기 위해 필수적이고 중요한 문제이다. 이는 자산의 포트폴리오 구성(asset portfolio allocation)과 위험 관리(risk management)를 효과적으로 하기 위해 각국의 주식(혹은 채권이나 외환) 시장들 간의 관계나 서로 다른 자산시장들 간의 관계를 제대로 이해하는 것이 필수적이기 때문이다. 따라서 금융시장들 간의 변동성전이(volatility spillover), 동조화(co-movement) 그리고 전염 효과(contagion effect) 등의 주제는 금융경제학과 계량경제학의 관련 분야에서 활발히 연구되어 왔다. 기존 연구들은 전통적으로 벡터자기회귀모형(vector autoregressive model), 다변량 일반 자기회귀 조건부이분산모형(multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model) 또는 이 두 모형을 결합한 형태의 모형을 이용한 분석을 실시하였다(Baele, 2005; Dungey et al., 2005; Forbes and Rigobon, 2002; Karolyi, 1995; King et al., 1994 참조). 이와 더불어 최근 들어 코플라(copula) 모형과 기존 다변량 모형에 코플라를 결합한 형태의 모형 또한 금융시장 간의 관계를 분석하는 데 사용되어 왔다(Garcia and Tsafack, 2011; Lee and Long, 2009; Rodriguez, 2007 등 참조).<sup>1)</sup>

각국의 주식시장들 간의 관계를 분석할 때, 기존 대부분의 연구들은 각국의 대표적인 주가지수들을 분석 대상으로 삼고 그 수익률들에 위 모형들을 적용하고 있다. 그러나 주가지수는 개별 기업의 시가총액에 따라 가중치를 둔 평균으로 해당 주식시장의 평균적인 움직임만을 반영하므로, 이를 계산하는 과정에서 시장 전체의 움직임에 대한 정보의 손실을 필연적으로 수반한다. 예를 들어, 2006년 4월 27일과 2007년 4월 5일의 S&P500 지수의 로그수익률은 0.33%와 0.30%로써 거의 동일하다. <Figure 1>의 왼쪽은 해당 날짜에 S&P500 지수를 구성하는 전체 개별 주가들의 일별 수익률의 분포를 나타내는 확률 밀도 함수를 제시하고 있다.<sup>2)</sup> 주가지수

1) Patton(2013)에서 설명하고 있듯이, 두 주식시장의 관계를 분석할 때 코플라를 적용하는 전형적인 방법은 다음과 같다. 우선 각 주식시장의 주가지수 수익률을 ARMA 모형과 GARCH 형태의 모형을 이용하여 평균과 변동성을 모형화한다. 이를 통해 도출되는 각 주가지수 수익률의 표준화된 잔차(standardized residual)들의 관계를 코플라 모형으로 모형화한다. 이때 Clayton, Gumbel, Frank, Gaussian 그리고 Student's t copula 등 다양한 코플라 함수 중에서 적합한 코플라를 채택한다.

로부터 계산한 수익률이 거의 같음에도 불구하고, 두 기간에 실현된 개별 수익률들의 횡단면 분포는 현저히 다른 것을 확인할 수 있다. 2006년 4월 27일의 미국 주식시장의 변동성이 훨씬 더 크며 분포의 꼬리도 훨씬 두껍다. 따라서 두 시기에 미국 주식시장으로부터 한국 주식시장으로 전달되는 정보는 질적으로 다를 것으로 예상되며, <Figure 1>의 오른쪽 그래프에서 다음날 KOSPI 지수를 구성하는 개별 주가의 수익률 분포가 실제로 현저히 다른 것을 관찰할 수 있다.<sup>3)</sup> 주가지수 수익률만을 이용해서 미국 주식시장으로부터 한국 주식시장으로의 전이효과를 분석할 때는 이러한 차이를 반영하지 못하는 한계가 있다. 본 논문의 주요 연구 동기는 주가지수만을 분석대상으로 삼을 때의 이러한 한계를 극복하고 주가지수를 구성하는 전체 개별 주가들의 수익률 횡단면 분포(cross-sectional distribution)를 고려하여 주식시장 간의 관계와 전이효과를 분석하는 것이다.

<Figure 1> Examples of Cross-Sectional Daily Stock Return Distributions



Notes: The left panel exhibits probability density functions of daily returns of the individual stocks constituting the S&P 500 at April 27th, 2006 (solid line) and April 5th, 2007 (dashed line). The right panel shows probability density functions of daily returns of the individual stocks constituting the KOSPI at the following days.

- 2) 2006년 4월 27일에 해당하는 확률 밀도 함수는 실선으로, 2007년 4월 5일에 해당하는 확률 밀도 함수는 점선으로 표현하였다. 이때 커널 밀도 추정법(kernel density estimation)을 이용하였으며, 밀도함수의 구체적인 추정 방법은 3.2절에 소개되고 있다.
- 3) 두 함수는 KOSPI 지수를 구성하는 전체 개별 주가들의 일별 수익률의 분포를 나타내는 확률 밀도 함수로써 2006년 4월 28일과 2007년 4월 6일에 실현된 분포를 각각 실선과 점선으로 나타내었다. 각 함수의 평균과 분산은 % 형태로 볼 때 (-1.32%, 12)과 (0.47%, 9)이다.

본 연구는 KOSPI (Korea Composite Stock Price Index) 지수와 S&P500 지수를 구성하는 전체 개별 주가 수익률들의 횡단면 분포의 시계열을 이용하여 한국과 미국 주식시장 간의 관계를 실증적으로 분석한다.<sup>4)</sup> 본 논문의 분석 대상이 횡단면 분포의 시계열, 즉 함수의 형태를 가진 시계열이기 때문에 이를 분석하기 위하여 함수적 회귀 (functional regression) 모형을 적용하고 있다. 본 논문은 전체 2005년 1월부터 2013년 12월까지의 기간을 글로벌 금융위기 기간(2007년 8월 1일부터 2009년 3월 31일까지) 과 금융위기 전후의 기간들로 나누어 분석하고 있으며, KOSPI 지수와 S&P500 지수를 구성하는 모든 개별 주식 수익률들을 포함하여 전체 표본기간 동안 각각 총 1,589,918개와 1,073,525개의 관측치를 사용하고 있다.

두 주식시장 간의 관계를 분석함에 있어 기존 연구들이 횡단면 관측치들의 총계인 주가지수를 이용해 온 반면, 본 논문은 개별 주가 수익률들의 횡단면 분포 자체를 분석의 대상으로 하고 있는 점이 가장 뚜렷한 특징이며 한국과 미국 주식시장 간의 함수적 회귀모형을 사용한 횡단면 분석은 본 논문에서 처음으로 이루어지는 것으로 판단된다. Kim and Kim (2010) 과 Park and Qian (2012) 또한 함수적 회귀 모형을 이용하여 한국과 미국 주식시장 간의 관계를 분석하고 있으나, 개별 주가 수익률들의 횡단면 분포가 아니라 하루 동안 실현되는 주가지수의 5분 단위 로그 수익률의 분포 간의 관계를 분석한 점에서 차이가 있다. 본 연구에서 적용하는 구체적인 분석의 방법론은 Bosq (2000), Park and Qian (2012), Hu et al. (2016) 에서 논의된 통계 및 계량경제학적 이론에 기반을 두고 있다. 특히 Hu et al. (2016) 는 함수적 자기회귀 모형 (functional autoregressive model) 에서 밀도함수의 적률 (moment) 과 꼬리확률 (tail probability) 의 역학 관계 (dynamics) 를 분석하는 새로운 분석도구들을 제시하고 있는데, 본 연구는 이러한 분석도구들을 함수적 회귀 모형에 적용하여 미국 주식시장으로부터 한국 주식시장으로의 전이효과 (spillover effect) 를 분석하고 있다.

본 연구의 주요 분석결과는 다음과 같다. 첫째, 이번 기 한국 주식시장에서 실현된 수익률 횡단면 분포의 분산, 즉 주식시장의 변동성은 지난 기 미국 주식시장에

4) 한국과 미국의 주가지수 수익률 간의 관계에 대한 연구는 활발히 진행되어 왔으며, 최근 Hwang et al. (2013), 정민수 (2016), 최경욱·조대형 (2017) 등은 한국과 미국 주식시장 사이의 전이효과와 동조화 정도가 글로벌 금융위기 이후에 여전히 크거나 금융위기 이전 보다 더 커졌다는 결론을 도출하고 있다. 반면 Lee and Yu (2018) 에서는 분석의 결과 금융위기 이후 동조화 정도가 줄어든 것으로 나타났다.

서 0 주변의 수익률이 상대적으로 많이 실현되는 안정적인 경우에 크게 감소한다. 반면 글로벌 금융위기 이전과 금융위기 기간에는 지난 기 미국 주식시장의 음(-)의 충격에 의한 이번 기 한국 주식시장의 분산 증가폭이 양(+)의 수익률 충격에 의한 분산 증가폭보다 훨씬 더 큰데, 이는 주가 수익률이 낮아질 때 변동성이 커지는 레버리지 효과(leverage effect)에 대응하는 결과이다. 그러나 이러한 비대칭적인 영향은 금융위기 이후 기간에는 나타나지 않는데, 이는 한국 주식시장 수익률 분포의 양쪽 꼬리확률이 미국 주식시장 횡단면 분포의 변화에 반응하는 행태가 금융위기 이후 기간에 변화하였기 때문인 것으로 보인다. 둘째, 이번 기 한국 주식시장 횡단면 분포의 평균은 주로 지난 기 미국 주식시장 횡단면 분포의 1차 적률과 3차 적률에 의해 영향을 받는 반면, 이번 기 한국 주식시장 횡단면 분포의 분산에 미치는 영향은 주로 미국 주식시장 횡단면 분포의 2차 적률과 4차 적률에 기인하는 것으로 나타났다.

셋째, 미국 주식시장으로부터 한국 주식시장으로의 각 적률별 전이효과는 금융위기 이전 기간이 가장 낮고, 금융위기 기간에 가장 높아졌으며, 금융위기 이후 줄어들었으나 금융위기 이전보다는 훨씬 높은 것으로 나타났다. 미국 주식시장으로부터 한국 주식시장의 평균으로의 전이효과는 금융위기 이전에 비해 금융위기 기간과 그 이후 기간에 커지기는 하나 그 상승폭이 각각 1.22배와 1.16배로 미미한 편이다. 그러나 한국 주식시장의 분산으로의 전이효과는 금융위기 이전에 비해 금융위기 기간에 4.6배의 큰 폭으로 증가하였고, 금융위기 이후 기간에는 다소 줄어들기는 하였으나 여전히 높은 3.6배의 수준으로 나타났다. 넷째, 위험관리와 관련 있는 한국 주식시장 횡단면 분포의 왼쪽 꼬리확률과 오른쪽 꼬리확률의 변동이 미국 주식시장 횡단면 분포의 변동에 의해 영향을 받는 비중 또한 금융위기 기간에 크게 증가하였는데, 다른 경우들과 달리 한국 주식시장의 오른쪽 꼬리확률은 금융위기 이후의 기간에 미국 주식시장과의 연계성이 한층 더 높아진 것으로 나타났다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제Ⅱ장에서는 함수적 회귀 모형 관련 이론 및 본 논문에서 사용하는 계량적 분석 도구를 소개한다. 두 횡단면 분포의 시계열 간의 관계를 분석하는 함수적 회귀 모형의 기본 구조를 설명하고, 모형의 추정 방법과 추정한 회귀 연산자를 토대로 두 분포 간의 관계를 분석하는 계량경제학적 도구들을 설명한다. 제Ⅲ장에서는 실증분석에 사용한 데이터와 모형 추정에 관련한 세부적인 사항을 서술하고 제Ⅳ장에서는 미국 주식시장으로부터 한국 주식시장으로의

전이효과에 대한 분석을 보고한다. 그리고 제V장에서 연구의 결론을 제시한다.

## II. 함수적 회귀 모형 및 분석도구

이 장에서는 함수적 회귀 모형 및 추정 방법을 소개하고, 추정된 결과를 통하여 두 횡단면 분포 간의 관계를 분석하는 도구들을 설명한다. 이와 관련된 이론들은 Bosq(2000), Park and Qian(2012)과 Hu et al.(2016)에 설명되고 있으므로, 본 연구에 필요한 개념과 방법론에 대해서만 간략히 소개한다.

### 1. 모형과 추정 방법

횡단면 분포를 나타내는 확률밀도함수들의 시계열을 각각  $(g_t)$ 와  $(f_t)$ 라 하자. 두 분포적 시계열(distributional time series) 또는 함수적 시계열(functional time series)을 콤팩트 부분집합(compact subset)에서 제공하여 적분 가능한(square integrable) 함수들의 공간인 힐버트 공간(Hilbert space)  $L^2(C_1)$ 과  $L^2(C_2)$ 에서 값을 갖는 확률변수(random variable)로 취급한다. 함수적 변수(functional variable)인  $(g_t)$ 와  $(f_t)$ 는 무한 차원(infinite dimensional)이며, 힐버트 공간의 모든  $v, w \in H(C)$ 에 대해 내적은  $\langle v, w \rangle = \int_C v(x)w(x)dx$ 로 정의한다.  $(g_t)$ 와  $(f_t)$ 이 정상적(stationary)이라는 가정 하에서 각 분포적 시계열의 평균  $\mathbf{E}g \in H_1$ 과  $\mathbf{E}f \in H_2$ 이 존재한다. 평균을 제거한 분포적 시계열의 선형 관계를 모형화하는 함수적 회귀 모형은 다음과 같다.

$$m_t = Aw_t + \epsilon_t (t = 1, 2, \dots, T) \quad (1)$$

여기서  $m_t = g_t - \mathbf{E}g$ ,  $w_t = f_t - \mathbf{E}f$ 이고,  $(m_t)$ 와  $(w_t)$ 는 각각  $H_1 = \{v \in L^2(C_1) \mid \int_{C_1} v(x)dx = 0, \int_{C_1} v^2(x)dx < \infty\}$ 과  $H_2 = \{u \in L^2(C_2) \mid \int_{C_2} u(x)dx = 0, \int_{C_2} u^2(x)dx < \infty\}$ 에서 값을 가진다.<sup>5)</sup>  $\epsilon_t$ 는  $H_1$ 에서 값을 갖는 함수적 백색잡음 프로세

5) 물론 평균을 제거하지 않고 분포적 시계열 자체를 이용한 모형인  $g_t = c + Af_t + \epsilon_t$ 를 고려할

스(functional white noise process)이다.

두 함수적 확률변수  $(m_t)$ 와  $(w_t)$ 의 분산과공분산 연산자는 다음과 같이 정의되며

$$Q = \mathbf{E}(w_t \otimes w_t), P = \mathbf{E}(w_t \otimes m_t), W = \mathbf{E}(m_t \otimes m_t),$$

여기서  $\otimes$ 는 텐서곱(tensor product)으로 두 벡터  $v \in H_1$ 와  $u \in H_2$ 의 텐서곱( $v \otimes u$ )는 모든  $w \in H_2$ 에 대해  $(v \otimes u)w = \langle u, w \rangle v$ 를 만족하는 연산자이다. 식 (1)의 양변에  $w_t$ 를 텐서곱하고 기댓값을 취함으로써 아래의 관계식을 얻을 수 있다.

$$P = AQ$$

이로부터 회귀 연산자  $A$ 를  $A = PQ^{-1}$ 로 정의하기 위해서는  $Q$ 의 역연산자(inverse operator)가 필요하다. 그러나 잘 알려진 것처럼 함수적 회귀 모형의 무한 차원성(infinite dimensionality) 때문에 역연산자  $Q^{-1}$ 가  $H_2$  전체 공간에서 잘 정의되지 않는 문제(ill-posed inverse problem)가 존재한다(Bosq, 2000 참조). 이 문제에 대처하는 일반적인 방법은  $A$ 가 정의되는 공간을  $H_2$ 의 유한한 부분집합(finite subset)으로 제한하는 것이다.  $Q$ 는 자기수반행렬(self-adjoint)이고 음이 아니며(nonnegative), 일반적으로( $w$ 가 non-degenerate이면) 양(strictly positive)이므로 아래와 같은 스펙트럼형 표기(spectral representation)가 가능하다.

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\xi_k \otimes \xi_k)$$

여기서  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > 0$ 는  $Q$ 의 고유값이고,  $\xi_1, \xi_2, \dots$ 은 각각의 고유값에 대응하는 고유벡터이다. 이 중  $K$ 개의 가장 큰 고유값에 대응되는  $K$ 개의 고유벡터가 전

---

수도 있다. 여기서  $c$ 는  $H_1$ 에서 값을 갖는 비확률적(nonrandom) 요소로 통상적인 회귀 모형의 상수항에 해당한다. 본 연구에서는 Hu et al. (2016)에서처럼 보다 단순한 형태인 평균을 제거한 함수적 회귀 모형을 고려한다.

개(span)하는 공간을  $V_K$ 라고 하자. 즉,  $V_K$ 는 함수적 주성분 분석(functional principal component analysis)을 통해 얻은  $(w_t)$ 의  $K$ 개 주성분에 의해 생성되는 공간이다.<sup>6)</sup> 부분 공간  $V_K$ 로의 사영(projection)을  $\Pi_K$ 라고 하고  $Q_K = \Pi_K Q \Pi_K$ 라고 할 때,  $V_K$  공간에서의  $Q$ 의 역연산자  $Q_K^+$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$Q_K^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} (\xi_k \otimes \xi_k),$$

이를 이용하여  $V_K$  공간에 제한된 회귀 연산자  $A_K$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A_K = P Q_K^+$$

고유값  $\lambda_k$ 는  $k$ 가 커짐에 따라 감소하여 0에 가까워지므로,  $V_K$ 의 차원( $K$ )이 증가함에 따라  $A_K$ 가  $A$ 를 더욱 잘 근사할 것이라고 기대할 수 있다. 그런데 실제 데이터를 가지고 분포적 시계열을 이용한 함수적 회귀 모형을 추정하고자 하는 경우, 분포를 나타내는 확률밀도함수( $g_t$ )와 ( $f_t$ )는 직접적으로 관찰되지 않는다. 그러므로 실현된 횡단면 관측치로부터 비모수적(nonparametric) 방법을 이용하여 확률밀도함수의 일치 추정량( $\hat{g}_t$ )과 ( $\hat{f}_t$ )을 구하고 이를 분석에 사용한다. Park and Qian (2012)은 일반적인 조건들 하에서 표본 추정량(sample analogue estimator)를 통하여 회귀 연산자의 일치 추정량(consistent estimator)을 얻을 수 있음을 보였다. 아래에서는 추정에 필요한 표본 추정량들을 구체적으로 어떻게 정의하는지에 관하여 간략하게 소개한다.

우선  $E f$ 는 표본 평균  $\bar{f} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{f}_t$ 을 이용하여 추정하며,  $\hat{w}_t = \hat{f}_t - \bar{f}_t$ 라고 하자. 이는 ( $g_t$ )와 ( $m_t$ )에 대해서도 동일하게 적용된다. 분산과 공분산 연산자  $Q$ 와  $P$ 에 대한 추정량  $\hat{Q}$ 과  $\hat{P}$ 은 아래와 같이 정의한다.

6) 주성분 분석은 데이터의 변량(variation)을 최대한 보존하면서 서로 직교하는 새로운 기저인 주성분을 찾아 고차원 공간의 표본들을 선형 연관성이 없는 저차원의 공간의 표본으로 변환하는 방법이다.

$$\hat{Q} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{w}_t \otimes \hat{w}_t), \quad \hat{P} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{m}_t \otimes \hat{w}_t)$$

이때 각각은  $Q$ 와  $P$ 의 일치 추정량이다. 분산 연산자  $Q$ 의 고유값과 고유벡터를 구하기 위해서는, 일치 추정량  $\hat{Q}$ 을 이용하여  $\hat{Q}\xi = \lambda\xi$ 의 관계를 만족하는 고유값과 고유벡터 추정치의 쌍  $(\hat{\lambda}_i, \hat{\xi}_i)$ 을 구하고  $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots$ 로 둔다. 이를 이용하여  $\hat{Q}_K^+ = \sum_{k=1}^K \hat{\lambda}_k^{-1} (\hat{\xi}_k \otimes \hat{\xi}_k)$ 를 구하면, 회귀 연산자의 추정량  $\hat{A}_K$ 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{A}_K = \hat{P} \hat{Q}_K^+$$

Park and Qian (2012)는 횡단면 분포를 추정하기 위해 사용하는 횡단면 관측치의 개수  $N$ 이 시계열 관측치  $T$ 보다 상대적으로 충분히 클 때, 일반적인 조건들 하에서  $\hat{A}_K$ 가 점근적으로 일치 추정량  $(\|\hat{A}_K - A\| \rightarrow_{a.s.} 0)$ 임을 증명하였다. 모형의 엄밀한 수학적 가정 및 추정의 일치성에 대한 증명은 Park and Qian (2012)을 참고하기 바란다.

## 2. 분포 간의 관계 분석도구

함수적 회귀 모형에서 회귀 연산자  $A$ 를 추정한 후 이를 분포의 예측에 이용할 수 있을 뿐만 아니라 이를 이용하여 두 분포의 관계에 대해 보다 엄밀한 분석을 할 수도 있다. Hu et al. (2016)은 함수적 자기회귀모형 (functional autoregressive model)에서 분포적 시계열의 역학 관계를 분석하는 틀을 제시하였는데, 본 논문의 4장에서는 Hu et al. (2016)의 분석 도구들을 함수적 회귀 모형에 적용하고 있다. 본 절에서는 이러한 분석 도구들을 간략히 설명한다.

### 1) 반응함수

모든  $v \in H_1$ 에 대하여, 분포적 시계열  $(m_t)$ 와  $v$ 를 내적인  $\langle v, m_t \rangle = \int_{C_1} v(x)$

$m_t(x)dx$ 를  $(m_t)$ 의  $v$ 방향으로의 좌표과정(coordinate process)이라고 정의한다. 식 (1)의 양변에  $v \in H_1$ 를 내적함으로써  $(w_t)$ 가 좌표과정  $\langle v, m_t \rangle$ 에 미치는 영향을 분석할 수 있다.

$$\langle v, m_t \rangle = \langle v, Aw_t \rangle + \langle v, \epsilon_t \rangle = \langle A^* v, w_t \rangle + \epsilon_t(v) \quad (2)$$

$A^*$ 는  $A$ 의 수반 연산자(adjoint operator)이고  $(\epsilon_t)$ 는 스칼라 값을 갖는 백색잡음 프로세스이다.  $w_t$ 의 서포트 상의  $x$ 에 디랙 델타 함수(Dirac delta function)  $\delta_x$ 로 충격이 주어질 경우,  $\langle v, m_t \rangle$ 는  $\langle A^* v, \delta_x \rangle = (A^* v)(x)$ 만큼 변화한다. 따라서  $A^* v$ 를  $w_t$ 에 대한  $\langle v, m_t \rangle$ 의 반응함수(response function)라고 해석할 수 있다.

식 (2)를 이용하면  $m_t$ 의 각 적률(moment) 들이  $w_t$ 에 대해 어떻게 반응하는지를 분석할 수 있다. 자연수  $p$ 에 대해  $\iota_p$ 를  $\iota_p(x) = x^p$ 와 같이 정의하면,  $v = \iota_p$ 일 때의 식 (2)의 좌변은

$$\langle \iota_p, m_t \rangle = \int_{C_1} x^p m_t(x) dx$$

가 되고, 이는  $(m_t)$ 의  $p$ 차 적률을 나타낸다.<sup>7)</sup> 만약 임의의 수열  $(c_{p,q})$ 에 대해  $A^* v = A^* \iota_p = \sum_{q=1}^{\infty} c_{p,q} \iota_q$ 라고 하면, 식 (2)의 우변의 첫번째 항은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\langle A^* \iota_p, w_t \rangle = \sum_{q=1}^{\infty} c_{p,q} \int_{C_2} x^q w_t(x) dx,$$

이는  $(w_t)$ 의 모든 적률들의 선형 결합을 나타낸다. 결과적으로 식 (2)를 다음과 같이 쓸 수 있으며

---

7) 실제 분석에서는 식 (1)의 양변에  $\iota_p^* = x^p - \frac{1}{|C_1|} \int_{C_1} x^p dx (\in H_1)$ 를 내적하는데, 이 경우  $\langle \iota_p^*, m_t \rangle = \langle \iota_p, m_t \rangle = \langle \iota_p, g_t \rangle - \mathbf{E} \langle \iota_p, g_t \rangle$ 가 성립하고 이는 확률 밀도함수  $(g_t)$ 의  $p$ 차 적률의 확률적 변동(random fluctuation)을 의미한다.

$$\int_{C_2} x^p m_t(x) dx = \sum_{q=1}^{\infty} c_{p,q} \int_{C_2} x^q w_t(x) dx + \epsilon_t(t_p),$$

이를 이용하여  $(m_t)$ 의  $p$ 차 적률이  $(w_t)$ 의 적률에 대해 어떻게 반응하는지를 분석할 수 있다.

4장의 실증분석에서는  $(m_t)$ 의 적률 외에도 양쪽 꼬리확률들이 어떻게 반응하는지도 분석하는데, 이를 위해서는 지시함수(indicator function)  $v(x) = I_E(x)$ 를 이용할 수 있다.  $v(x) = I_E(x)$ 일 때  $\langle v, m_t \rangle = \int_E m_t(x) dx$ 는  $(m_t)$ 의 구간  $E$ 의 값이 실현될 확률을 의미한다. 따라서,  $q_{0.05}$ 을  $(m_t)$ 의 0.05 분위수(quantile)라 하고  $E = (-\infty, q_{0.05})$ 을 적용하면  $(m_t)$ 의 5% 왼쪽 꼬리확률(left tail probability)이  $w_t$ 의 변화에 의해 어떻게 반응하는지를 살펴볼 수 있다. 마찬가지로  $q_{0.95}$ 을  $(m_t)$ 의 0.95 분위수라 하고  $E = (q_{0.95}, \infty)$ 을 적용하면 오른쪽 꼬리확률(right tail probability)의 반응함수를 구할 수 있다.

## 2) 분산분해 및 전이효과 지수

Hu et al. (2016)은  $\langle v, m_t \rangle$ 의 분산이  $(w_t)$ 의 적률들의 분산에 의해 설명되는 비중을 분산분해(variance decomposition)를 통해 분석하는 방법 또한 제시하였다. 이를 위해, 다음의 두 조건을 만족하는  $k$ 차 다항식(polynomial)인 정규 적률 기저(normalized moment basis)  $u_k \in H_2(k=1,2,\dots)$ 를 정의 한다.

$$(a) \quad \langle 1, u_k \rangle = 0$$

$$(b) \quad \langle u_p, Qu_q \rangle = 1 \text{ if } p = q, \text{ and } 0 \text{ if } p \neq q \text{ for all } p \text{ and } q.$$

$u_k(k=1,2,\dots)$ 는 일반화된 그람-슈미트 과정(generalized Gram-Schmidt procedure)을 통해 얻을 수 있다.  $(u_k)$ 는 내적  $\langle \cdot, Q \cdot \rangle$ 에 대하여 정규직교 집합(orthonormal set)이며  $L^2(C_2)$ 를 전개하는 정규직교 기저(orthonormal basis)이다.<sup>8)</sup> 따라서  $k$ 차 다항식인 정규 적률 기저  $u_k$ 는  $(w_t)$ 의 정규화된  $k$ 차 적률을 생성

하는 함수로 볼 수 있으며,  $u_k$ 의 직교성을 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \langle A^* v, w_t \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle A^* v, Qu_k \rangle \langle u_k, w_t \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, AQu_k \rangle \langle u_k, w_t \rangle, \\ \mathbf{E} \langle A^* v, w_t \rangle^2 &= \mathbf{E} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, AQu_k \rangle \langle u_k, w_t \rangle \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, AQu_k \rangle^2 \mathbf{E} \langle u_k, w_t \rangle^2 \end{aligned}$$

$\mathbf{E} \langle u_k, w_t \rangle^2$ 는  $w_t$ 의  $k$ 차 적률인  $\langle u_k, w_t \rangle$ 의 분산을 나타내고,  $\mathbf{E} \langle u_k, w_t \rangle^2 = \langle u_k, Qu_k \rangle = 1$ 이다. 결과적으로  $\langle v, m_t \rangle$ 의 분산에 대한 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{E} \langle v, m_t \rangle^2 = \mathbf{E} \langle A^* v, w_t \rangle^2 + \mathbf{E} \langle v, \epsilon_t \rangle^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, AQu_k \rangle^2 + \mathbf{E} \langle v, \epsilon_t \rangle^2 \quad (3)$$

식 (3)의 자세한 도출과정은 Hu et al. (2016)의 4.2장에 제시되어 있다.

식 (3)로부터  $\langle v, m_t \rangle$ 의 분산 중  $(w_t)$ 의 적률들의 분산에 의해 설명되는 비중을  $R_v^2$ 로 정의하고, 직교하는  $w_t$ 의 적률 중  $k$ 번째 적률의 분산에 의해 비롯되는  $\langle v, m_t \rangle$ 의 분산의 비중을  $\pi_v(k)$ 로 정의한다.

$$R_v^2 = 1 - \frac{\mathbf{E} \langle v, \epsilon_t \rangle^2}{\mathbf{E} \langle v, m_t \rangle^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_v(k) \text{ for } \pi_v(k) = \frac{\langle v, AQu_k \rangle^2}{\mathbf{E} \langle v, m_t \rangle^2} \quad (4)$$

이들에 대한 일치 추정량은 다음과 같다.

$$\hat{R}_v^2 = 1 - \frac{\langle v, \hat{\Sigma} v \rangle}{\langle v, \hat{W} v \rangle} \text{ and } \hat{\pi}_v(k) = \frac{\langle v, \hat{A}_K \hat{Q} u_k \rangle^2}{\langle v, \hat{W} v \rangle}, \text{ where}$$

---

8) 정규적률 기저  $(u_k)$ 를 이용하여, 어떤  $v \in H_1$ 에 대해서도  $A^* v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle A^* v, Qu_k \rangle u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, AQu_k \rangle u_k$ 로 나타낼 수 있다.

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (\hat{\epsilon}_t \otimes \hat{\epsilon}_t) \text{ and } \hat{W} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{m}_t \otimes \hat{m}_t)$$

4장에서는 식 (4)의  $R_v^2$ 를 미국 주식시장에서 한국 주식시장으로의 각 적률별 전이 효과 지수로 사용하고 있는데, 이는 Kim and Kim (2010)이 전이효과를 분포의 적률 간 동조화로 정의한 것과 유사한 취지이며  $R_v^2$ 를 사용할 경우 명시적으로 전이 효과의 크기를 나타낼 수 있는 장점이 있다.

### III. 데이터 및 모형 추정

#### 1. 데이터, 모형 및 표본기간 구분

본 장에서는 한국과 미국의 주식시장들의 함수적 회귀 모형을 추정하는데 사용한 데이터와 모형 추정의 세부적인 과정을 설명한다. 전체 분석 기간은 2005년 1월부터 2013년 12월까지이며, 이를 글로벌 금융위기 기간과 금융위기 전후의 기간들과 나누어 분석할 것이다. 한국과 미국 주식시장의 대표 주가지수인 KOSPI와 S&P500 지수를 구성하는 전체 개별 주가들의 일별 수익률 분포를 분석의 대상으로 삼았다. 사용한 데이터는 *Data Stream*에서 제공하는 현지 통화로 표시된 기업별 주가( $p_{i,t}$ )의 시계열 데이터로써, 이는 횡단면 관측치의 수가 일정하지 않는 불균형 패널이다. 주가지수를 구성하는 개별 종목의 목록은 기업의 신규상장과 상장 폐지에 따라 달라지는데 *Data Stream*은 이를 한 달 단위로 갱신하여 제공한다. 본 연구에서는 각 분기말의 목록을 기준으로 하여 분기별 패널을 병합하여 데이터를 구축하였다. 주가는 일별 증가로 제공되며 개별 주가의 일별 수익률은 주가에 로그를 취해 차분한 로그 수익률( $r_{i,t} = \log p_{i,t} - \log p_{i,t-1}$ )을 사용하였다. 전체 분석 기간 동안 KOSPI와 S&P500을 구성하는 개별 주가로부터 계산한 수익률 관측치는 각각 총 1,589,918개와 1,073,525개이다. 대응하는 날짜의 자료가 동시에 존재하지 않는 경우에는 표본에서 제외하였다.<sup>9)</sup>

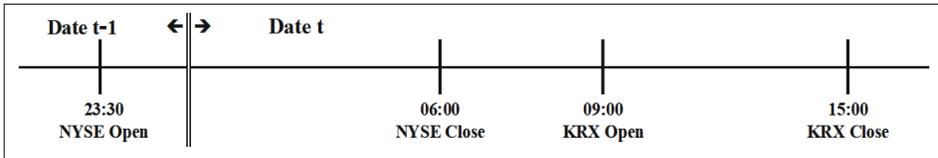
9) 본문에 설명한 방법으로 구축한 데이터의 평균적인 일별 수익률 관측치의 수는 한국 주식시장의 경우 735.7개, 미국 주식시장의 경우 499.5개이다.

〈Figure 2〉은 한국시간을 기준으로 두 주식시장의 정규거래시간(regular trading hours)을 나타낸다.<sup>10)</sup> 한국시간을 기준으로  $t-1$ 일의 오후 11:30부터  $t$ 일의 오전 6:00까지 미국 주식시장에서 거래가 이루어진 이후 한국 주식시장에서  $t$ 일의 거래가 이루어진다. 따라서 본 논문에서는 미국 주식시장의 수익률이 먼저 실현되고 이 정보가 한국 주식시장에 영향을 미치는 것을 명시적으로 드러내기 위하여, 식 (1) 대신 아래의 함수적 회귀 모형을 고려한다.

$$m_t = Aw_{t-1} + \epsilon_t \tag{5}$$

여기서  $m_t$ 는  $t$ 기의 평균을 제거한 한국 주식시장의 횡단면 분포이고  $w_{t-1}$ 는  $t-1$ 기의 평균을 제거한 미국 주식시장의 횡단면 분포이다. 이 경우 종속변수인 한국 주식시장의 수익률 분포가 독립변수인 미국 주식시장 수익률 분포에 영향을 미쳐 발생하는 내생성 문제(endogeneity problem)를 피할 수 있다.

〈Figure 2〉 Regular Trading Hours of NYSE and KRX



Notes: The figure represents regular trading hours of the New York Stock Exchange (NYSE) and the Korea Exchange (KRX) based on Korea Standard Time. During the daylight saving time in the United States, the regular trading hours of the New York Stock Exchange (NYSE) is changed, and it becomes from 22:30 to 05:00 on the following day. From 1st August 2016, the Korea Exchange (KRX) extended the closing time to 15:30 while maintaining the opening time.

본 연구에서는 전체 표본을 글로벌 금융위기 기간과 이를 전후한 기간으로 나누어 분석함으로써 시간에 따라 변화하는 두 주식시장 간의 관계를 관찰한다. 글로벌 금융위기 기간을 구체적으로 어떻게 정할 것인가에 관해서는 여러 논의가 있어왔

10) 한국거래소(KRX)는 2016년 8월 1일부터 개장시간은 그대로 유지한 채 폐장시간을 15:30으로 30분 연장하였다. 미국 뉴욕 주식시장의 정규거래시간은 서머타임 기간에 한국시간으로 22:30부터 다음날 05:00로 변경된다.

다. 해당 기간을 정의함에 있어 재량적 선택을 피하고자 하는 연구들에서조차도 금융위기 기간을 추정하기 위한 계량적 모델(econometric model)을 선택하는 과정에서 재량이 개입된다(Baur, 2012). Filardo et al. (2010)은 국제결제은행(The Bank for International Settlements) 보고서에서 금융위기 기간을 4단계(initial financial turmoil, sharp financial market deterioration, macroeconomic deterioration, stabilization and tentative signs of recovery)로 나누어 연구하고, 이 중 처음의 세 단계를 금융위기 기간으로 정의하며 2007년 3분기부터 2009년 1분기까지로 명시하고 있다. Taylor and Williams(2008)는 2007년 8월을 금융위기가 시작된 시기로 지적하고 있는데, 이는 이 시기에 리보금리의 급격한 상승으로 단기유동성이 악화되어 중앙은행들은 엄청난 양의 유동성을 시장에 주입하였고, 투자은행인 Bear Stearns의 두 곳의 헤지 펀드가 파산하였으며, BNP Paribas는 모기지 펀드 환매를 중단하였기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 이들 연구에서 지적한 2007년 8월부터 2009년 3월까지를 금융위기 기간으로 정의하고 분석을 진행하였다.<sup>11)</sup>

각 기간의 일별 수익률의 횡단면 분포를 개괄적으로 보기 위하여, 횡단면 관측치의 기초통계량을 계산하여 각 기간별 평균을 구하였다.<sup>12)</sup> 즉, 각 날짜별 주식시장의 개별 주가 수익률들로 기초통계량들을 계산하고 표본기간별로 그 기초통계량들의 평균을 구하여 <Table 1>에 제시하였다. 두 주식시장의 횡단면 수익률 평균은 글로벌 금융위기 기간에 음(-)의 값을 가지는 반면, 글로벌 금융위기전과 후에는 양(+)의 값을 가진다. 금융위기 이전에는 한국 주식시장의 수익률이 미국 주식시장의 수익률보다 평균적으로 높았던 반면, 금융위기 이후 경제가 회복되는 시기에는 미국 주식시장의 수익률이 평균 적으로 더 높다. 횡단면 관측치들의 분산은 세 기간 모두 미국 주식시장보다 한국 주식시장에서 크게 나타나며, 두 시장에서 공통적으로 글로벌 금융위기 기간에 분산이 크게 증가한 것을 확인할 수 있다.

특히 미국 주식시장에서는 다른 시기와 비교하여 금융위기 기간에 수익률 분포의 분산이 4배 가량 증가하였고, 크게 왼쪽으로 편포(left skewed) 되었으며 첨도

11) 본 논문의 3장과 4장에서 보고한 결과는 글로벌 금융위기 이후 기간을 2009년 4월부터 2013년 12월까지로 설정하고 분석한 결과이다. 강건성 점검(robustness check)을 위하여 금융위기 이후의 기간을 2011년 12월까지로 좁혀 분석한 결과도 본문에서 소개하는 결과와 질적으로 다르지 않다.

12) 전체 관측치 중 이상치(outlier)를 제외한 99.99%와 99.95%의 한국 주식시장과 미국 주식시장의 일별 수익률 데이터를 분석에 사용하였다.

(kurtosis) 또한 가장 큰 모습을 보인다.

다음 절에서는 두 주식시장의 횡단면 분포를 추정한 후 기간별 평균 분포를 제시 하는데, 기간별 평균 분포의 특징들은 <Table 1>의 내용에 부합하고 있다.

<Table 1> Descriptive Statistics on Cross-Sectional Daily Returns

|          | Pre-crisis<br>(Jan 2005-Jul 2007) |         | Crisis<br>(Aug 2007-Mar 2009) |         | Post-crisis<br>(Apr 2009-Dec 2013) |         |
|----------|-----------------------------------|---------|-------------------------------|---------|------------------------------------|---------|
|          | Korea                             | U. S.   | Korea                         | U. S.   | Korea                              | U. S.   |
| Mean     | 0.0015                            | 0.0004  | -0.0013                       | -0.0021 | 0.0002                             | 0.0009  |
| Variance | 0.0009                            | 0.0002  | 0.0012                        | 0.0009  | 0.0008                             | 0.0002  |
| Skewness | 0.7425                            | 0.1355  | 0.4714                        | -0.3635 | 0.5793                             | 0.1099  |
| Kurtosis | 9.8543                            | 11.6964 | 8.2695                        | 13.4376 | 11.3514                            | 12.4630 |
| Min      | -0.1423                           | -0.0744 | -0.1521                       | -0.1602 | -0.1465                            | -0.0796 |
| Max      | 0.1391                            | 0.0758  | 0.1406                        | 0.1323  | 0.1388                             | 0.0825  |
| #. obs   | 705                               | 499.6   | 745.6                         | 499.4   | 756.6                              | 499.6   |

Notes: The data are collected from January 1, 2005 to December 31, 2013. Full sample period is divided into three sub-periods (pre-crisis, crisis, post-crisis). Descriptive statistics on cross-sectional daily returns for each date used for further analysis are calculated, and their average values over each subsample are represented in the table. #. obs is the number of stocks for the KOSPI index or the S&P500 index.

## 2. 모형의 추정

### 1) 확률밀도함수의 추정

함수적 회귀 모형을 추정하기에 앞서, 횡단면 분포를 나타내는 밀도함수는 직접 관찰되지 않으므로 실현된 관측치들로부터 이를 먼저 추정하여야 한다. 잘 알려진 많은 확률 밀도 함수들은 실수 전체를 서포트(support)로 가지나, 실제 금융·경제 분야에서 관찰되는 밀도함수들 중 서포트가 무계인(unbounded) 경우는 거의 존재하지 않는다. 따라서 콤팩트(compact)한 부분 집합  $C$ 를 충분히 크게 하였을 때, 대부분의 함수들을  $L^2(C)$  공간의 함수로 근사할 수 있다고 본다. 본 연구에서는 한국과 미국 주식시장의 전체 관측치들의 99.99%와 99.95%를 포함하는 구간을 서포트로 설정하였으며, 이는 각각  $[-0.2720, 0.2182]$ 와  $[-0.3732, 0.3502]$ 이다.

각 구간 안에서 균등하게 나뉜 1024개 점에 대하여 커널 밀도 추정법을 통해 불연속인 각 점에서 밀도함수가 갖는 함수값의 추정치를 얻었다. 밀도함수의 추정을 위하여 Epanechnikov 커널 및 Silverman(1986)이 제안한 대역폭(Rule-of-Thumb bandwidth)  $h(t) = 2.3449\hat{\sigma}_t/n_t^{\frac{1}{5}}$ 을 선택하였다.<sup>13)</sup>

〈Figure 3〉의 상단의 두 그림은 추정된 밀도함수들의 시계열을 나타낸 것으로 시간에 따라 분포가 변하는 것을 확인할 수 있다. 비록 금융위기 기간중 밀도함수의 변화가 상대적으로 뚜렷한 것을 볼 수 있으나 전반적으로 안정적인 변화를 보이고 있어 본 연구에서는 두 분포의 시계열이 각 기간 별로 정상적(stationary)이라고 가정한다.<sup>14)</sup> 한국 주식시장에서 실현된 밀도함수는 상대적으로 평평한 모양인 반면, 미국 주식시장에서 실현된 밀도함수는 0 주변에서 뾰족한 모양을 갖는 것이 두 주식시장 간의 뚜렷한 차이점이다. 〈Figure 3〉은 표본기간별 평균 밀도함수(mean density)를 나타낸 것으로 글로벌 금융위기 기간 동안 절대값이 큰 수익률이 상대적으로 많이 실현되었음을 관찰할 수 있다. 이는 특히 미국 주식시장의 경우에 뚜렷이 보이는데, 〈Table1〉의 기초통계량을 통해 해당 기간에 주식시장의 분산이 크게 증가한 사실에 부합하고 있다.<sup>15)</sup> 〈Figure 3〉의 하단의 두 그림은 분포적 시계열에서 〈Figure 4〉에 나타낸 시기별 평균 밀도함수를 제한, 평균이 제거된 밀도함수(demeaned density)의 시계열이다.

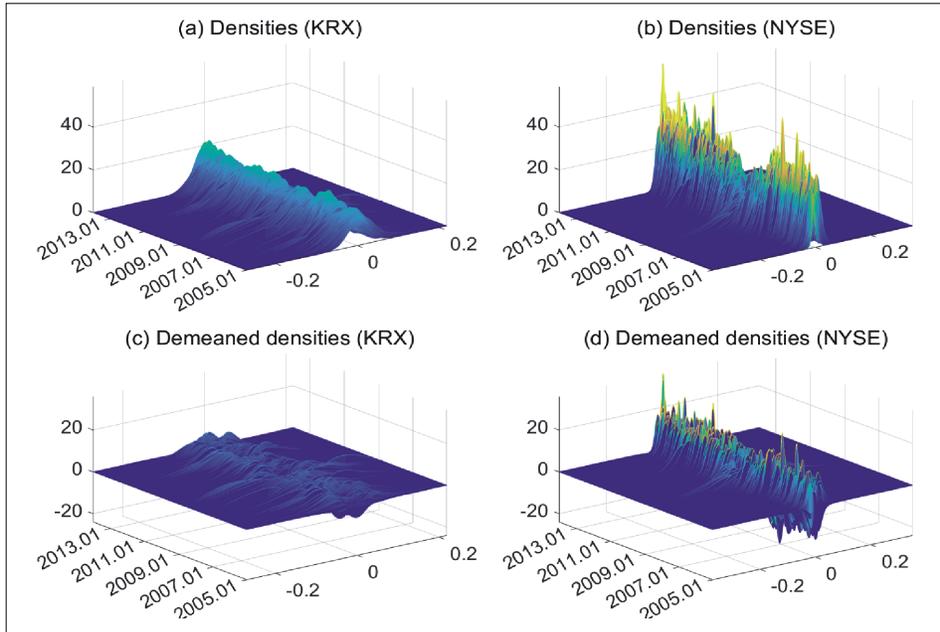
아래의 함수적 회귀 모형의 추정 및 다음 장의 전이효과 분석에서는 이러한 평균이 제거된 밀도함수를 사용할 것이다.

13)  $t$ 기에  $n$ 개의 일별 수익률의 관측치  $r_{1,t}, r_{2,t}, \dots, r_{n,t}$ 이 있을 때,  $\hat{\sigma}$ 은  $n$ 개 관측치의 표준 편차이다.

14) 분포의 시계열이 확인한 비정상성(nonstationarity)을 지닌 것으로 보일 때는 이를 검정하기 위해 Chang et al. (2016)의 방법론을 이용할 수 있다.

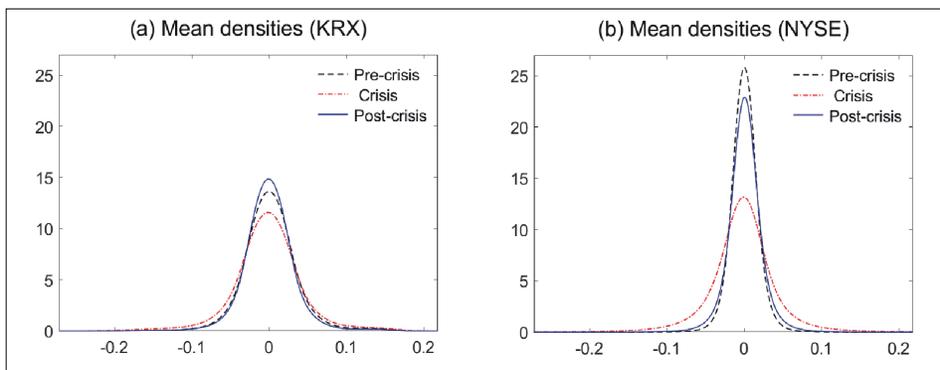
15) 한국과 미국 주식시장의 평균 밀도함수의 형태를 비교하기에 용이하도록 서포트가 더 작은 한국 주식시장의 서포트에 맞추어 미국 주식시장의 평균 밀도함수를 나타내었다.

〈Figure 3〉 Estimated Cross-Sectional Distributions of KRX and NYSE Stocks Daily Returns



Notes: The left panels present, respectively, the densities and demeaned densities of the cross-sectional distributions obtained from daily returns of stocks constituting the KOSPI. The right panels present, respectively, the densities and demeaned densities of the cross-sectional distributions obtained from daily returns of stocks constituting the S&P500. To make the demeaned densities, the mean density for the corresponding period is subtracted from the time series of the densities.

〈Figure 4〉 Mean Densities for Each Period



Notes: The left and right panels represent mean densities of the time series of cross-sectional distributions obtained from daily returns of stocks constituting the KOSPI and S&P500, respectively. They present time average of the estimated densities at each three period.

## 2) 함수적 회귀 모형의 추정

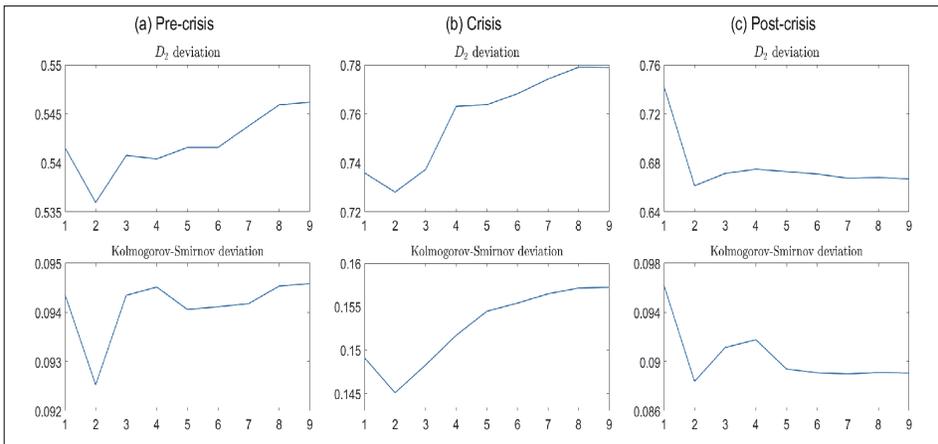
본 절에서는 식 (5)에 표현된 함수적 회귀 모형을 추정하는 세부적인 방법을 설명한다. 우선 실제적인 계산을 위하여 앞 절에서 추정한 밀도함수를 웨이블릿(wavelet)을 이용한 1037개의 기저함수로 표현한다.<sup>16)</sup> 기저함수를 이용해 1037 차원(dimension)의 벡터로 표현된 밀도함수의 좌표(coordinate)는 해당하는 밀도함수의 웨이블릿 계수(coefficient)이다. 이러한 방법의 변형(transform)을 이용하여 함수적 시계열을 고차원 벡터의 시계열로 변환함으로써, 표본 공분산 연산자  $\hat{P}$ 와  $\hat{Q}$ 의 행렬 표현을 얻을 수 있고 이로부터 연산자  $Q$ 의 고유값과 고유벡터 ( $\hat{\lambda}_k, \hat{\xi}_k$ ) 및 회귀 연산자  $\hat{A}_k$ 를 추정한다. 2장에서 논의하였듯, 회귀 연산자의 추정 과정에서  $Q$ 의 역연산자를 새롭게 정의하며 이를 위해 주성분 분석(principal component analysis)을 이용한 차원 축소의 과정을 거친다. 즉 분산 연산자의 역연산자( $Q^{-1}$ )를  $K$ 개의 주성분이 전개하는 공간에서 새롭게 정의함으로써 회귀 연산자의 추정량 ( $\hat{A}_K$ )을 구할 수 있다. 이를 위해 장애모수(nuisance parameter)인 주성분의 개수  $K$ 를 결정하여야 하는데, 본 논문에서는 Hu et al. (2016)이 제안한 것처럼 표본 외 예측 성과(out-of-sample forecast performance)와 누적설명분산 비율(cumulative proportion of explained variance)을 고려하여 이를 결정하였다.

주성분의 개수  $K$ 를 결정하기 위하여 각 기간마다  $K(=1, 2, \dots, 9)$ 에 따른 표본 외 예측을 시행하고 예측오차(forecast error)가 가장 낮은 값을 제시하는  $K$ 를 선택하는데, Hu et al. (2016)과 동일한 예측 방법(one-step-ahead rolling window forecasting)을 사용하고 각 표본기간별로 마지막 네 달(22일×4)의 횡단면 분포를 예측하였다. 이렇게 얻은 예측값과 실제값 사이의 편차( $D_2 = \left\{ \int (\tilde{f}(x) - f(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$ ,  $D_{ks} = \sup_x |\tilde{F}(x) - F(x)|$ )의 네 달치 평균을 계산하고 이를 <Figure 5>에 제시하였다. <Figure 5>의  $x$ 축은 주성분의 개수( $K$ )이며  $y$ 축은 예측오차를 나타낸다. 공통적으로 두 개의 주성분을 사용할 때 표본 외 예측 성과가 가장 좋은 것을 확인할 수 있으며, 두 개 이상의  $K$ 를 택하는 경우에 편차가 증가 하는 것을 볼 수 있다. 이에 따라 세 기간에 동일하게 2개의 주성분을 회귀 연산자 추정에 사용하였다.

16) Daubechies wavelet을 이용하였으며, wavelet decomposition level을 3으로 설정할 때 기저함수의 수는 1037로 정해진다.

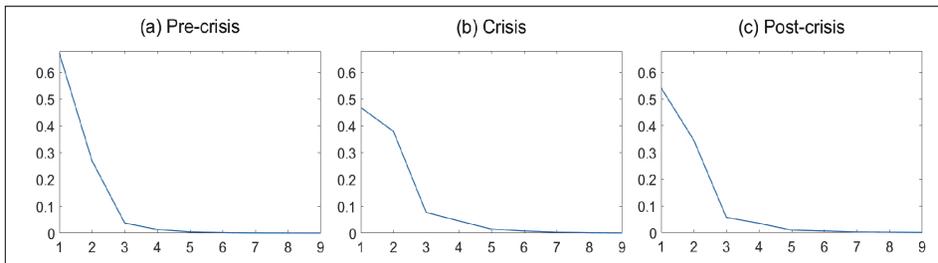
〈Figure 6〉은 각 기간별로 스크리 플롯(scrree plot)을 그린 것이며, 2개의 주성분들은 전체 변동성(total variation)의 94.1%, 84.9% 그리고 88.8%를 각각 설명한다. Horváth and Kokoszka (2012)는 85%의 누적설명분산 비율을 주성분의 개수를 결정하는 적절한 수준으로 제시하였다. 회귀 연산자의 추정에 사용하는 차원을 더 늘리는 것은 더 많은 정보를 이용할 수 있다는 이점이 있으나, 두 함수 간의 주된 관계를 명료하게 묘사하고자 하는 목적에는 부합하지 않는다.

〈Figure 5〉 Forecast Errors



Notes: One-step-ahead rolling window forecasting for 88 business days is performed for the regression operator estimated with different  $K(=1,2,\dots,9)$  in each subsample. Forecast errors, deviations of the predicted values from observed values, are measured using  $D_2(= \{f(\tilde{f}(x) - f(x))^2 dx\}^{\frac{1}{2}}$  that is based on the density functions and  $D_{ks}(= \sup_x |\tilde{F}(x) - F(x)|)$  that is based on the distribution functions. The figures represent the average forecast errors according to the choice of  $K$  at each subsample period.

〈Figure 6〉 Scree Plots for Cross-Sectional Distributions of NYSE Stocks Daily Returns



Notes: The nine largest eigenvalues of the sample variance operator for the cross-sectional densities of the NYSE stock returns are presented in descending order.

#### IV. 전이효과 분석 결과

이 장에서는 함수적 회귀 모형의 추정치를 토대로 미국 주식시장에서 한국 주식 시장으로의 전이효과(spillover effect)를 분석한 결과에 대해 설명한다. 한국 주식시장 횡단면 수익률 분포의 1차와 2차 적률 및 분포의 양쪽 꼬리확률이 미국 주식시장의 수익률의 분포의 각 수익률 수준에서의 충격에 대해 어떻게 영향을 받는지를 반응함수를 통해 분석하고, 분산분해를 통해 한국 주식시장 횡단면 수익률 분포의 각 적률과 꼬리확률의 변동 중 미국 주식시장 횡단면 수익률 분포의 적률들의 변동에 의해 설명되는 비중을 분석한다. 2장에서 설명하였듯이, 본 논문에서는 분산분해에서 도출되는 식 (4)의  $R_v^2$ 를 미국 주식시장으로부터 한국 주식시장으로의 전이 효과의 척도로 사용한다. 이는 Kim and Kim (2010)이 분포의 적률 간 동조화로 전이 효과를 정의한 것과 유사한 취지로, 한국 주식시장에 미치는 미국 주식시장 수익률 분포의 개별 적률들의 영향을 고려하는 동시에  $R_v^2$ 의 크기를 통해 명시적으로 전이 효과의 크기가 표본기간 별로 변화해 온 정도를 알 수 있다는 장점을 지니고 있다.

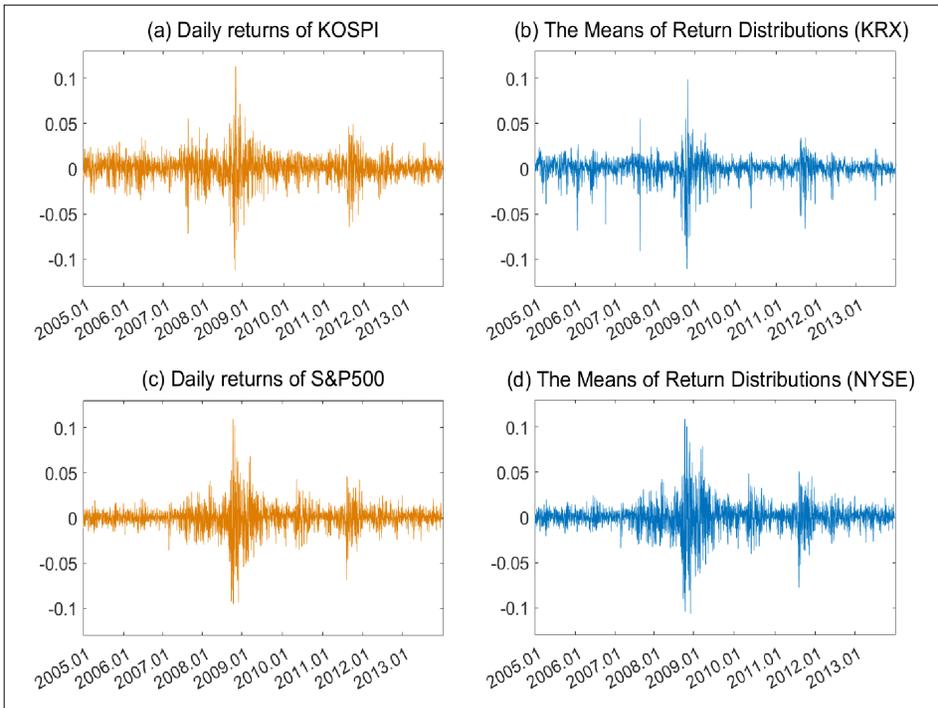
##### 1. 평균과 분산으로의 전이효과 분석 결과

주가 수익률 횡단면 분포의 1차 적률은 개별 종목 주가 수익률들의 평균 수익률이며, 본 연구에서는 이번 기 한국 주식시장의 평균 수익률에 미치는 지난 기 미국 주식시장 수익률 분포의 적률들의 영향을 평균으로의 전이(spillover to mean)로 부른다. 마찬가지로 수익률 횡단면 분포의 2차 적률은 주식시장의 분산을 의미하며, 이번 기 한국 주식시장의 분산에 미치는 지난 기 미국 주식시장 적률의 영향을 분산으로의 전이(spillover to variance)<sup>17)</sup>라고 부른다. 본 연구에서 분석하는 횡단면 분포의 평균은 균등 가중평균을 이용한 지수(equally weighted index)의 로그 수익률에 대응하고, KOSPI 지수와 S&P500 지수 등의 주가지수는 개별 기업들의 시가총액에 따라 가중치를 부여하여(weighted average based on market capitalization) 구해진다. 따라서 <Figure 7>에서와 같이 본 연구에서 분석하는 주가 지수를 구성하

17) 2차 적률은 엄밀하게는 분산과 다르나, 횡단면 수익률 분포의 평균을 제공하였을 때 0에 굉장히 가깝기 때문에 본 논문에서는 주식시장의 변동성을 의미하는 2차 적률과 분산을 구분하여 사용하지 않는다.

는 개별 주가 수익률들의 횡단면 분포의 평균과 주가지수의 로그 수익률은 엄밀하게는 일치하지 않으나 전반적으로 유사한 움직임을 보인다. 18) 본 연구에서 추정한 미국 주식시장의 횡단면 분포의 평균과 S&P500 지수의 로그 수익률은 전반적으로 매우 유사한 것을 확인할 수 있었으며, 한국 주식시장의 횡단면 분포의 평균과 KOSPI 지수의 로그 수익률은 전반적으로는 유사하나 미국의 경우에 비해서는 오차가 다소 큰 것으로 나타났다. 이는 KOSPI 지수의 경우 삼성전자 등과 같이 시가총액의 비중이 월등하게 큰 소수의 대기업이 존재하기 때문인 것으로 보인다.

〈Figure 7〉 Sample Path of the Index Return and The Mean from Estimated Density Functions

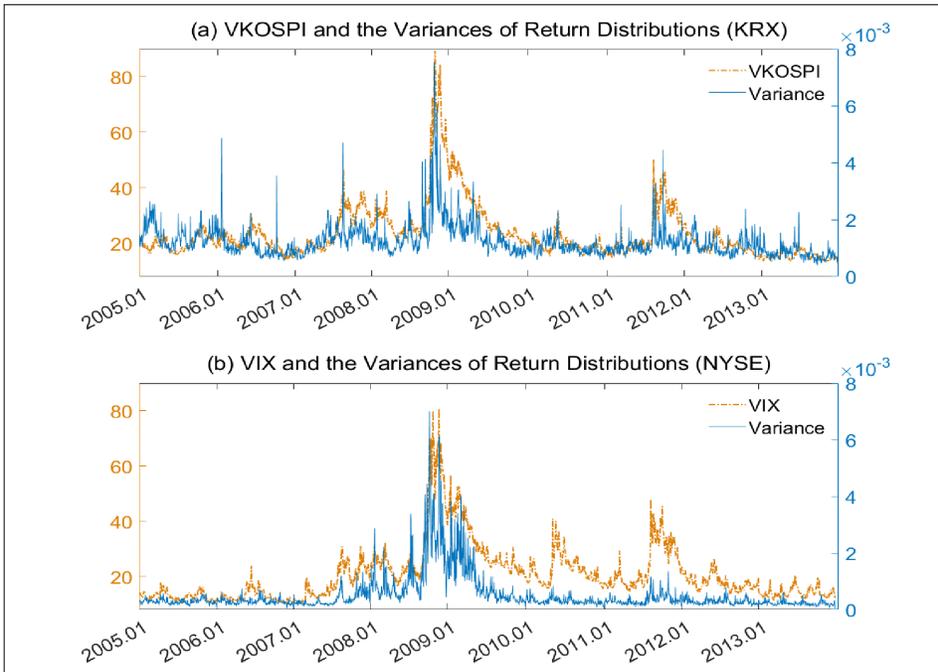


Notes: The left two panels show daily log returns of the KOSPI index (upper panel) and the S&P500 index (lower panel). The right two panels present means of cross-sectional distributions obtained from daily returns of stocks constituting the KOSPI index (upper panel) and the S&P500 index (lower panel).

18) 주가지수 계산에 사용되는 가중치를 개별 주가 수익률에 부과한 후의 횡단면 분포를 고려하는 것도 가능하나, 가중치가 시간에 따라 변하기 때문에 이를 모두 반영하기 어려워 본 논문에서는 가중 수익률(weighted return)을 이용하지 않았다.

기존 연구들에서는 주식시장의 변동성을 흔히 주가지수 수익률의 변동성을 이용하여 측정/분석하는 반면, 본 연구에서 다루는 횡단면 분포의 분산은 주가지수를 구성하는 개별 종목 주가 수익률들의 분산이므로 엄밀하게는 다른 의미의 주식시장의 변동성 (volatility) 을 나타내는 지표 (measure) 이다. <Figure 8>은 각 주식시장의 횡단면 분포의 분산과 변동성의 지수중 하나인 VKOSPI 지수와 VIX 지수를 제시하고 있다. VKOSPI 지수는 KOSPI200 지수의 옵션가격들에서 도출되는 내재변동성 (implied volatility) 이며 VIX 지수는 S&P500 지수의 옵션가격들에서 도출되는 내재변동성이다. 각 주식시장의 횡단면 분포의 분산과 내재변동성이 유사한 움직임을 보이는 것을 확인할 수 있다. 각 주가지수의 고빈도 (high frequency) 자료를 이용한 실현변동성 (realized volatility) 과도 비교해 보았으나, 횡단면 분포의 분산은 내재변동성의 움직임과 더욱 유사한 것으로 나타났다.

<Figure 8> Sample Path of the Volatility Index and The Variance from Estimated Density Functions



Notes: The upper panel shows variances of cross-sectional distributions obtained from daily returns of stocks constituting KOSPI (solid line) and volatility index, VKOSPI (dashed line). The lower panel shows variances of cross-sectional distributions obtained from daily returns of stocks constituting S&P500 (solid line) and volatility index, VIX (dashed line).

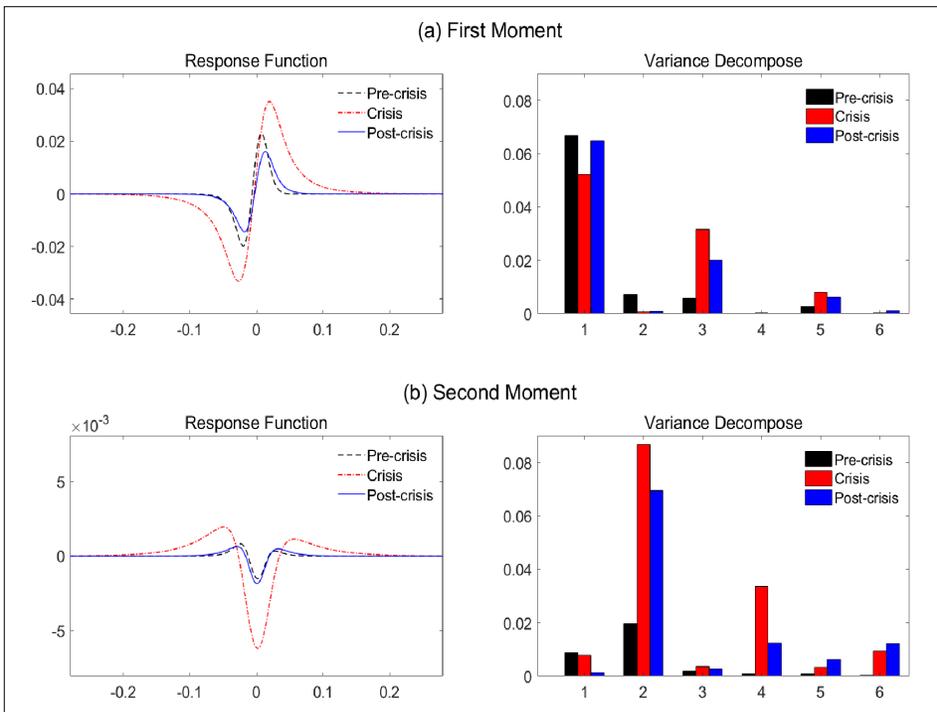
한국 주식시장 횡단면 수익률 분포의 평균과 분산으로의 전이효과를 분석한 결과는 <Figure 9>와 <Table 2>에 제시되어 있다. <Figure 9>의 왼쪽 그래프는 각 기간 별로 추정된 1차와 2차 적률의 반응 함수<sup>19)</sup>이고 오른쪽 그래프는 이에 대응하는 분산분해 결과를 나타낸다. <Figure 9(a)>는 1차 적률의 반응함수를 제시하는데, 이는 지난 기 미국의 횡단면 분포에서 수익률의 각 수준(반응함수의  $x$ 축)에 디랙 델타(Dirac delta) 충격이 있을 때 한국 주가 수익률의 횡단면 분포의 1차 적률이 어떻게 반응하는지를 나타낸다. 지난 기 미국 주식시장에 음의 수익률이 상대적으로 많이 실현되는 경우에 이번 기 한국 주식시장의 수익률들의 평균은 하락한다. 반면 지난 기 미국 주식시장에서 양의 수익률이 상대적으로 많이 실현될 때 한국 주식시장의 수익률들의 평균은 상승한다. 큰 틀에서 미국 주식시장 수익률 분포가 변할 때 한국 주식시장 수익률 분포의 평균이 반응하는 방향은 변하지 않았으나, 표본기간별로 평균의 변화폭에 차이가 있으며 평균의 변화폭은 금융위기 기간에 훨씬 더 큰 것으로 나타난다. 분산분해를 통하여 한국 주식시장의 평균으로의 전이효과를 미국 주식시장 수익률 분포의 개별 적률들에 의한 효과로 분리한 결과, 평균으로의 전이효과는 미국 주식시장의 1차 적률뿐만 아니라 3차 적률에 의해 비롯되는 것으로 나타났다.

<Figure 9(b)>는 2차 적률의 반응함수를 통하여 지난 기 미국 주식시장의 분포에서 수익률의 각 수준에 충격이 있을 때 이번 기 한국 주식시장의 분산이 어떻게 반응하는지를 분석한다. 지난 기 미국 주식시장에서 0 근방의 수익률이 상대적으로 많이 실현되는 안정적인 경우에는 다음 기 한국 주식시장의 분산은 크게 감소한다. 반면, 미국 주식시장에서 상대적으로 큰 음의 수익률 혹은 양의 수익률이 상대적으로 많이 실현되는 경우 다음 기 한국 주식시장의 분산은 증가한다. 글로벌 금융위기 이전과 금융위기 기간에는 지난 기 미국 주식시장의 음의 수익률 충격에 의한 이번 기 한국 주식시장의 분산 증가폭이 양의 수익률 충격에 의한 분산 증가폭보다 더 큰데, 이는 주가 수익률이 낮아질 때 변동성이 커지는 레버리지 효과(leverage effect)에 대응하는 결과이다. 반면 금융위기 이후의 기간에는 이러한 비대칭적인 영향이 사라지고 미국 주식시장의 음과 양의 수익률이 한국 주식시장 분산에 거의 비슷한 영향을 미치는 것으로 나타났다. 이는 금융위기 이전과 비교할 때, 미국 주

19) 반응함수의 신뢰구간을 구하는 것은 부트스트랩(bootstrap) 방법에 의해 가능하다.

식시장에서 실현된 음의 수익률이 한국 주식시장의 분산을 증가시키는 영향은 조금 줄어든 반면, 양의 수익률이 분산을 증가시키는 영향은 다소 커졌기 때문에 나타났다. 한국 주식시장의 횡단면 수익률 분포의 평균에 대한 분석과 마찬가지로 분산의 경우도 금융위기 기간 동안에 미국 주식시장의 횡단면 수익률 분포의 변화에 가장 크게 반응한다. 분산분해 결과를 보면 한국 주식시장의 분산으로의 전이효과에는 미국 주식시장 수익률 분포의 2차 적률뿐만 아니라 4차 적률 또한 영향을 미치는 것으로 나타났다.

(Figure 9) Impulse Responses and Variance Decompositions for Moments of Cross-Sectional Distributions of KRX Stocks Daily Returns



Notes: The left two panels plot respectively the responses of the first moment (upper panel) and the second moment (lower panel) of the current distribution of the KRX stocks daily returns to Dirac-impulses to the last day's NYSE density function at different levels of return. The right two panels depict respectively the proportions of variances in the first moment (upper panel) and in the second moment (lower panel) of the current distribution of the KRX stocks daily returns that are explained by the variances of the first six moments of the last day's NYSE stocks return distribution.

〈Table 2〉 R-squared in the Moments Analysis

|            | Pre-crisis<br>(Jan 2005-Jul 2007) | Crisis<br>(Aug 2007-Mar 2009) | Post-crisis<br>(Apr 2009-Dec 2013) |
|------------|-----------------------------------|-------------------------------|------------------------------------|
| 1st moment | 0.0850                            | 0.1039                        | 0.0987                             |
| 2nd moment | 0.0352                            | 0.1607                        | 0.1250                             |

Notes: The table represents the proportions of the variances of the current first and second moments of cross-sectional distributions of KRX stocks daily returns that are explained by the variances of the previous moments of cross-sectional distributions of NYSE stocks daily returns.

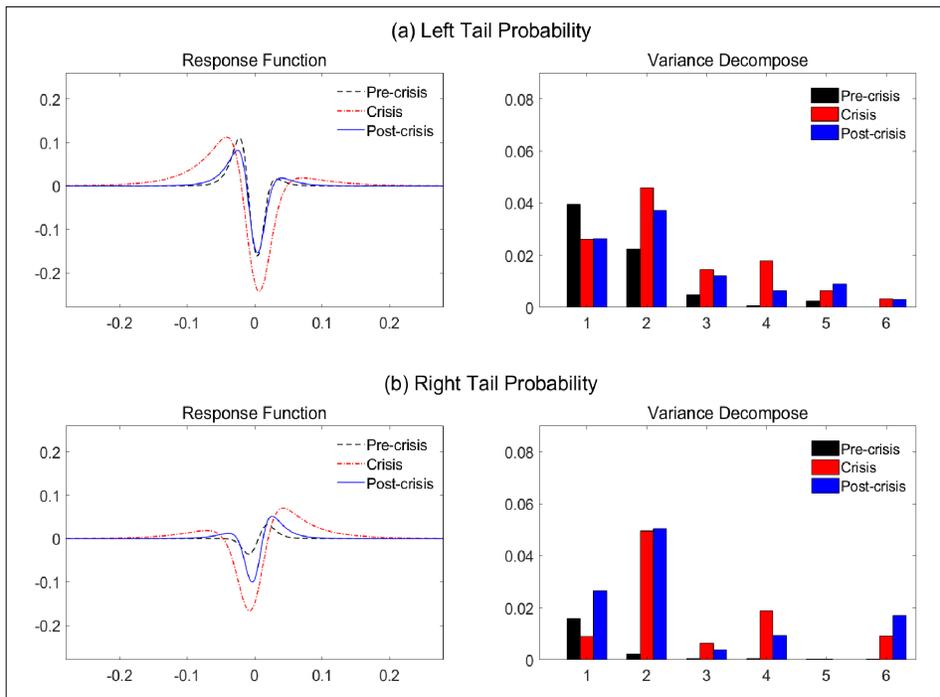
〈Table 2〉는 한국 주식시장 횡단면 수익률 분포의 1차 적률과 2차 적률의 분산분해를 통해 구한  $R_v^2$ 의 값을 제시하고 있다. 〈Table 2〉를 보면,  $R_v^2$ 의 값들 자체가 높지 않은 점과 1차 적률과 2차 적률의 모든 경우에 전이효과 지수가 금융위기 이전 기간에 가장 낮고 금융위기 기간에 가장 높은 것을 알 수 있다. 기존 연구결과들에 비해 본 논문에서는 각 표본기간별 전이효과를  $R_v^2$ 의 값을 통해 수치화하고 있으므로 다음과 같은 해석을 가능하게 한다. 평균으로의 전이효과 지수는 금융위기 이전(0.085)에 비하여 금융위기 기간과 그 이후 각각 0.104와 0.099로 다소 높아 지기는 하나 그 상승폭이 각각 1.22배와 1.16배로 미미한 것으로 나타난 반면, 분산으로의 전이효과 지수는 금융위기 이전(0.035)에 비해 금융위기 기간과 그 이후 각각 0.161과 0.125로 4.6배와 3.6배의 큰 폭의 증가를 나타내고 있다. 미국 주식시장의 변동에 의한 한국 주식시장 횡단면 수익률 분포의 1차 적률과 2차 적률의 반응, 즉 평균과 분산으로의 전이효과가 모두 글로벌 금융위기 기간중 가장 크게 나타나는 점은 충분히 예상할 수 있는 데,<sup>20)</sup> 금융시장의 변동성이 큰 시기, 즉 금융시장의 위기로 정의되는 기간에 금융시장 간의 연계성이 증가한다는 것은 기존 문헌들을 통해 꾸준히 지적되어 왔다(Lin et al., 1994; Ang and Bekaert, 2002; 등 참조). 금융위기 이후 금융시장이 안정되는 시기에 전이효과가 줄어들기는 하나 금융위기 이전에 비교해서는 뚜렷하게 높은 것으로 나타난 점은 글로벌 금융위기 이후 국제 자본시장의 통합이 더욱 가속화되고 있기 때문으로 보인다.

20) 3차 적률과 4차 적률을 분석한 경우에도 금융위기 기간 동안 전이효과가 높아졌음을 확인할 수 있었다.

## 2. 분포의 꼬리확률로의 전이효과 분석 결과

1차와 2차 적률 외에도 주식시장 횡단면 분포의 꼬리 부분에 대한 분석은 금융 감독(financial supervision)과 위험 관리(risk management) 측면에서 중요하다. 이 절에서는 함수적 회귀 모형을 통해 한국 주식시장 횡단면 수익률 분포의 꼬리 부분과 미국 주식시장 횡단면 수익률 분포 간의 관계를 분석한 결과를 제시한다. 왼쪽 꼬리는 표본기간별 평균 밀도함수의 5% 분위수 이하의 수익률들을 포함하고, 반대로 오른쪽 꼬리는 95% 분위수 이상의 수익률들을 포함한다. 각 표본기간에 따라

(Figure 10) Impulse Responses and Variance Decompositions for Tail Probabilities of Cross-Sectional Distributions of KRX Stocks Daily Returns



Notes: The left two panels plot respectively the impulse responses of the left tail probability (upper panel) and the right tail probability (lower panel) of the current distribution of the KRX stocks daily returns to Dirac-impulses to the last day's NYSE density function at different levels of return. The right two panels depict respectively the proportions of variances in the left tail probability (upper panel) and in the right tail probability (lower panel) of the current distribution of the KRX stocks daily returns that are explained by the variances of the first six moments of the last day's NYSE stocks return distribution.

주식거래자들의 기대는 다를 것이므로, 해당 표본기간의 평균 밀도함수(〈Figure 4〉)로부터 5%와 95% 분위수를 각각 정하였다.<sup>21)</sup> 지난 기 미국 주식시장의 분포가 주어졌을 때, 한국 주식시장에서 꼬리에 해당하는 구간에서 수익률이 실현될 확률을 분석한 결과는 〈Figure 10〉과 같다.

〈Figure 10〉의 반응함수를 통하여, 지난 기 미국 주식시장에서 0 근방의 수익률이 상대적으로 많이 실현되는 경우에 이번 기 한국 주식시장 수익률 분포의 양쪽 꼬리확률은 크게 감소함을 알 수 있으며, 이는 2차 적률의 반응함수가 보인 특징과 비슷하다. 한국 주식시장 수익률 분포의 왼쪽 꼬리확률은 지난 기 미국 주식시장에서 비교적 절대값이 큰 음의 수익률이 상대적으로 많이 실현되는 경우 뚜렷이 증가하지만, 비교적 절대값이 큰 양의 수익률이 상대적으로 많이 실현되는 경우에는 미미하게 반응하는 것으로 나타났다. 오른쪽 꼬리확률은 이와 반대 방향의 반응을 보이고 있다. 두 꼬리확률의 반응함수들을 비교할 때 나타나는 특징은 왼쪽 꼬리확률의 반응함수가 오른쪽 꼬리확률의 반응함수보다 평균적으로 훨씬 큰 절대값을 가진다는 점이다. 이는 2차 적률의 반응함수가 지난 기 미국 주식시장의 수익률 수준에 따라 비대칭적으로 반응하는 것과는 직접적인 관련이 있다. 즉, 지난 기 미국 주식시장에서 동일한 크기의 음의 수익률과 양의 수익률에 충격이 주어질 때, 음의 수익률에 대한 충격으로 한국 주식시장의 왼쪽 꼬리확률이 증가하는 폭이 양의 수익률에 대한 충격으로 오른쪽 꼬리확률이 증가하는 폭보다 크다. 따라서 분산도 음의 수익률이 상대적으로 많이 실현될 경우 더 크게 증가하는 것으로 나타난다. 분산분해의 결과, 한국 주식시장의 왼쪽과 오른쪽 꼬리확률은 대체로 미국 주식시장 수익률 분포의 1차 적률과 2차 적률에 가장 큰 관련이 있으나, 금융위기 기간에는 더 높은 차수(order)의 적률이 미치는 영향 또한 상대적으로 증가하였음을 알 수 있다.

〈Table 3〉은 한국 주식시장 횡단면 수익률 분포의 양쪽 꼬리확률의 분산분해를 통해 구한  $R_v^2$  값을 제시하고 있다. 이를 보면 지난 기 미국 주식시장 횡단면 수익률 분포의 변동에 의해 설명되는 이번 기 한국 주식시장 횡단면 수익률 분포의 꼬리확률의 변동이 글로벌 금융위기 기간 이전에 비해 글로벌 금융위기 기간에 확연히 커

21) 예를 들어, 왼쪽 꼬리를 위험(risk)이라고 해석할 때, 금융위기 이전과 금융위기 기간에 투자자들이 위험으로 인식하는 수익률의 범위는 다를 것이다.

진 것을 알 수 있다. 즉, 적률의 분석결과와 동일하게 한국 주식시장의 꼬리확률과 미국 주식시장 수익률 분포 간의 연계성 또한 금융위기 기간에 증대되었다. 또한 오른쪽 꼬리확률의  $R_w^2$ 가 금융위기 이후 미국의 경제가 회복되는 시기에 더 커진 점도 주목할 만하다. <Figure 10(b)>의 분산분해의 결과에서 볼 수 있듯, 이는 미국 주식시장 수익률 분포의 1차 적률에 의해 비롯하는 한국 주식시장의 오른쪽 꼬리 확률의 변동 비중이 상대적으로 증가한 것에 기인하는 것으로 보인다. 반면, 미국 주식시장 수익률 분포의 적률들의 변동에 의해 설명되는 한국 주식시장 수익률 분포의 왼쪽 꼬리확률의 변동은 금융위기 이후 다소 줄어들었다.

<Table 3> R-squared in the Tail Probabilities Analysis

|                        | Pre-crisis<br>(Jan 2005-Jul 2007) | Crisis<br>(Aug 2007-Mar 2009) | Post-crisis<br>(Apr 2009-Dec 2013) |
|------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|------------------------------------|
| Left tail probability  | 0.0738                            | 0.1277                        | 0.1081                             |
| Right tail probability | 0.0205                            | 0.1017                        | 0.1225                             |

Notes: The table represents the proportions of the variances of the current left and right tail probabilities of cross-sectional distributions of KRX stocks daily returns that are explained by the variances of the previous moments of cross-sectional distributions of NYSE stocks daily returns.

## V. 결 론

본 논문은 함수적 회귀 모형을 이용하여 한국과 미국 주식시장의 수익률 횡단면 분포 간의 관계를 연구함으로써 주가지수만을 이용할 때 살펴볼 수 없는 새로운 측면들을 분석하였다. 첫째, 지난 기 미국 주식시장 횡단면 분포의 각 수익률 수준에서의 변화가 한국 주식시장의 횡단면 분포의 1차 적률, 2차 적률과 양쪽 꼬리확률에 미치는 서로 다른 영향을 분석하였다. 둘째, 한국 주식시장의 횡단면 분포의 1차 적률, 2차 적률과 양쪽 꼬리확률의 변동이 지난 기 미국 주식시장 횡단면 분포의 적률들의 변동에 의해 설명되는 비중을 분석하였다. 본 연구의 분석 결과에 따르면 미국 주식시장으로부터 한국 주식시장의 횡단면 분포의 평균 및 분산으로의 전이효과는 금융위기 기간에 크게 증가하였다. 금융위기 이후 이러한 전이효과는 다시 줄어들었으나, 금융위기 이전과 비교해서는 커진 것으로 나타낸다. 분산분해

의 결과, 한국 주식시장 횡단면 분포의 평균의 변동에는 미국 주식시장 횡단면 분포의 평균의 변동뿐만 아니라 3차 적률의 변동 또한 관련이 있다. 또한 한국 주식시장 횡단면 분포의 분산의 변동에는 미국 주식시장 횡단면 분포의 분산뿐만 아니라 4차 적률의 변동이 관련됨을 확인할 수 있었다.

본 논문은 개별 주식 수익률들의 횡단면 분포 자체를 분석의 대상으로 삼고 함수적 회귀 모형을 이용하여 두 주식시장의 분포적 관계에 대해 보다 깊은 이해를 제공한다는 점에서 의미가 크다. 함수적 회귀 모형 관련 연구에서 대부분의 실증분석들은 함수적 자기회귀 모형을 이용한 함수 예측에 대한 것인데 반해, 본 논문은 함수적 회귀 모형을 통해 경제적 분석을 시도하고 있다는 점이 특징이다. 함수적 회귀 모형 및 이를 통한 경제적 분석은 최근 확립되어 가는 새로운 분야이므로, 본 논문과 같이 분포적 경제 시계열들 간의 관계를 분석하는 후속 연구들이 활발할 것으로 기대된다. Allen et al. (2012)은 금융기관들의 주가 수익률의 횡단면 분포를 고려하여 Value at Risk나 Expected Shortfall을 구함으로써 경제의 시스템 리스크(systemic risk)를 측정하고 있으며, 이를 통해 향후 경기하강을 예측할 수 있음을 보이고 있다. 이들이 제안한 시스템 리스크 추정치는 본 논문에서 분석하는 대상 중 하나인 횡단면 분포의 왼쪽 꼬리확률과 관련이 있다. 따라서 금융기관들의 주가 수익률의 횡단면 분포를 이용하여 함수적 회귀모형을 설정한 후, 왼쪽 꼬리확률의 충격반응과 분산분해를 분석함으로써 한 국가의 시스템 리스크에 미치는 전이효과를 분석하는 것도 후속 연구에서 다룰 수 있을 것으로 예상된다.

또한 후속 연구로서 본 논문에서 다루는 모형을 확장하여 주식시장 간의 분포적 관계를 분석하는 것이 바람직할 것으로 보인다. 본 논문의 함수적 회귀 모형은 지난 기 미국의 횡단면 분포만을 독립변수로 포함하였다. 그러나 많은 경우에서 시계열은 (함수적 시계열도 마찬가지로) 지난 기 실현된 자신의 값에도 크게 의존한다. 따라서 함수적 자기회귀 모형과 함수적 모형을 결합한  $m_t = Am_{t-1} + Bw_{t-1} + \epsilon_t$  과 모형을 고려하는 것이 적합할 것으로 보인다. 이 모형을 적용할 때 반응함수와 분산분해를 어떻게 수행할 것인지에 대한 후속연구가 필요한데, 이 경우 미국 주식시장으로부터 한국 주식시장으로의 한계적(marginal) 영향을 보다 정확히 분석할 수 있을 것으로 기대된다.

■ 참 고 문 헌

1. 정민수, “비정상 오차항을 갖는 연속시간모형 회귀분석과 주가지수 동조화,” 『한국경제학보 (구 연세경제연구)』, 제23권 제2호, 2016, pp.165-197.  
(Translated in English) Jeong, Minsoo, “Continuous-time Regression with Nonstationary Error and the Comovement of Stock Indices,” *The Korean Journal of Economics*, Vol. 23, No. 2, 2016, pp.165-197.
2. 최경욱·조대형, “한국, 중국, 미국 주식시장의 시변하는 동조화와 동태적전이효과,” 『국제금융연구』, 제7권 제2호, 2017, pp.5-31.  
(Translated in English) Choi, K. and D. Cho, “Time-varying Co-movement and Dynamic Spillover Effect among Korean, Chinese, and U.S. Stock Markets,” *Review of International Money and Finance*, Vol. 7, No. 2, 2017, pp.5-31.
3. Allen, L., T. G. Bali, and Y. Tang, “Does Systemic Risk in the Financial Sector Predict Future Economic Downturns?” *The Review of Financial Studies*, Vol. 25, No. 10, 2012, pp.3000-3036.
4. Ang, A., and G. Bekaert, “International Asset Allocation with Regime Shifts,” *The Review of Financial Studies*, Vol. 15, No. 4, 2002, pp.1137-1187.
5. Baele, L., “Volatility Spillover Effects in European Equity Markets,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 40, No. 2, 2005, pp.373-401.
6. Baur, D. G., “Financial Contagion and the Real Economy,” *Journal of Banking & Finance*, Vol. 36, No. 10, 2012, pp.2680-2692.
7. Bosq, D., “Linear Processes in Function Spaces: Theory and Applications,” *Lecture Notes in Statistics*, Vol. 149. Springer, New York, 2000.
8. Chang, Y., C. S. Kim, and J. Y. Park, “Nonstationarity in Time Series of State Densities,” *Journal of Econometrics*, Vol. 192, No. 1, 2016, pp.152-167.
9. Dungey, M., R. Fry, B. González-Hermosillo, and V. L. Martin, “Empirical Modelling of Contagion: A Review of Methodologies,” *Quantitative Finance*, Vol. 5, No. 1, 2005, pp.9-24.
10. Filardo, A., J. George, M. Loretan, G. Ma, A. Munro, I. Shim, P. Wooldridge, Yetman, James, and H. Zhu, “The International Financial Crisis: Timeline, Impact and Policy Responses in Asia and the Pacific,” *BIS Papers*, Vol. 52, 2010, pp.21-82.
11. Forbes, K. J., and R. Rigobon, “No Contagion, Only Interdependence: Measuring Stock Market Comovements,” *The Journal of Finance*, Vol. 57, No. 5, 2002, pp.2223-2261.
12. Garcia, R., and G. Tsafack, “Dependence Structure and Extreme Comovements in International Equity and Bond Markets,” *Journal of Banking & Finance*, Vol. 35, No. 8, 2011, pp.1954-1970.
13. Horváth, L., and P. Kokoszka, *Inference for Functional Data with Applications*, Springer, New York, 2012.
14. Hu, B., J. Y. Park, and J. Qian, “Analysis of Distributional Dynamics for Repeated Cross-Sectional and Intra-Period Observations, Manuscript, Indiana University, 2016.

15. Hwang, E., H. G. Min, B. H. Kim, and H. Kim, "Determinants of Stock Market Comovements among US and Emerging Economies During the US Financial Crisis," *Economic Modelling*, Vol. 35, 2013, pp.338-348.
16. Karolyi, G. A., "A Multivariate GARCH Model of International Transmissions of Stock Returns and Volatility: The Case of the United States and Canada," *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 13, No. 1, 1995, pp.11-25.
17. Kim, S., and C. S. Kim, "Do S&P 500 and KOSPI Move Together?: A Functional Regression Approach," *Korean Economic Review*, Vol. 26, 2010, pp.401-430.
18. King, M., E. Sentana, and S. Wadhvani, "Volatility and Links between National Stock Markets (No. w3357)," *National Bureau of Economic Research*, 1990.
19. Lee, J., and B. K. Yu, "What Drives the Stock Market Comovements between Korea and China, Japan and the US?" *KDI Journal of Economic Policy*, Vol. 40, No. 1, 2018, pp.45-66.
20. Lee, T. H., and X. Long, "Copula-based Multivariate GARCH Model with Uncorrelated Dependent Errors," *Journal of Econometrics*, Vol. 150, No. 2, 2009, pp.207-218.
21. Lin, W. L., R. F. Engle, and T. Ito, "Do Bulls and Bears Move Across Borders? International Transmission of Stock Returns and Volatility," *Review of Financial Studies*, Vol. 7, No. 3, 1994, pp.507-538.
22. Park, J. Y., and J. Qian, "Functional Regression of Continuous State Distributions," *Journal of Econometrics*, Vol. 167, No. 2, 2012, pp.397-412.
23. Patton, A., "Copula Methods for Forecasting Multivariate Time Series," *Handbook of Economic Forecasting*, Vol. 2, 2013, pp.899-960.
24. Rodriguez, J. C., "Measuring Financial Contagion: A Copula Approach," *Journal of Empirical Finance*, Vol. 14, No. 3, 2007, pp.401-423.
25. Silverman, B. W., *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall, 1986.
26. Taylor, J. B., and J. C. Williams, "A Black Swan in the Money Market," *American Economic Journal: Macroeconomics*, Vol. 1, No. 1, 2009, pp.58-83.

## Distributional Relationship between the Korean and the U.S. Stock Markets Analyzed by a Functional Regression Approach\*

Gyung Mo Kim\*\* · Heejoon Han\*\*\*

### Abstract

This paper investigates spillover effects from the U.S. stock market to the Korean stock market by considering a functional regression model. Instead of using stock market indices, we consider cross-sectional distributions of all stock returns that comprise the KOSPI index and the S&P 500 index. We use daily data from January 2005 to December 2013 and consider three subsamples: pre-crisis, crisis and post-crisis period. We estimate a functional regression model and adopt novel econometric tools recently proposed by Hu et al. (2016) to analyze the relationship between cross-sectional distributions of two stock markets. We use response functions to examine how each moment and tail probability of the Korean stock market distribution react to shocks in the US stock market distribution. We also conduct variance decomposition and provide interpretations on spillover effect from the U.S. stock market to the Korean stock market. The spillover effects to mean,

---

*Received: Aug. 14, 2018. Revised: March 12, 2019. Accepted: May 3, 2019.*

\* We would like to thank Chang Sik Kim (Sungkyunkwan University), Joon Y. Park (Indiana University & Sungkyunkwan University) and Dooyeon Cho (Sungkyunkwan University) for helpful comments and suggestions.

\*\* First Author, M.A. Student, Department of Economics, Sungkyunkwan University, 25-2, Sungkyunkwan-ro, Jongno-gu, Seoul 03063, Korea, e-mail: eco.gyungmo@gmail.com

\*\*\* Corresponding Author, Associate Professor, Department of Economics, Sungkyunkwan University, 25-2, Sungkyunkwan-ro, Jongno-gu, Seoul 03063, Korea, Phone: +82-2-760-0428, e-mail: heejoonhan@skku.edu

variance and left tail probability were higher in the post-crisis period than in the pre-crisis period and were the highest during the crisis period. On the contrary, the spillover effect to right tail probability was the highest in the post-crisis period.

**Key Words:** functional regression, cross-sectional distribution, stock market linkage, spillover effect

**JEL Classification:** C14, C22, G15